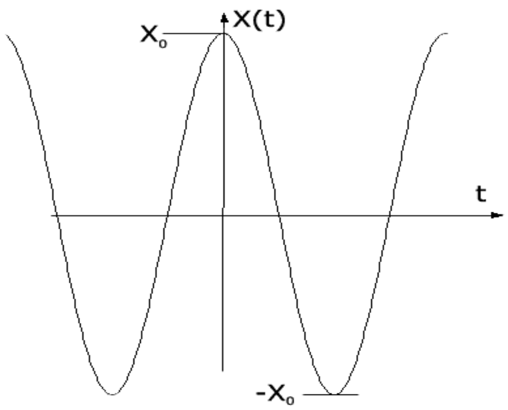
Un mundo de osciladores

Los osciladores están en todas partes, desde los átomos y las moléculas o las antenas de los teléfonos móviles hasta los parques infantiles y los relojes, pasando por los corazones. Trataremos de mostrar algunas de sus principales características y sus comportamientos más típicos con ayuda de materiales que están al alcance de todos.

1. Generalidades: el oscilador armónico

El mundo está lleno de sistemas físicos cuyos estados se repiten a lo largo del tiempo, oscilando a un lado y otro de una posición de equilibrio estable, a menudo de forma periódica. Para nosotros, su importancia está en esa periodicidad, que permite medir el tiempo, y en su capacidad de emitir y absorber energía.

El ***oscilador armónico*** es un modelo matemático utilizado para estudiar aproximadamente[1] una gran variedad de esos sistemas. En el caso unidimensional hay una sola coordenada X (la *separación del sistema respecto a su posición de equilibrio*) que oscila. Puede ser una longitud como en los muelles, un ángulo como en los péndulos, la concentración de una especie química o una componente de un campo eléctrico o magnético...
Su evolución temporal es ésta:

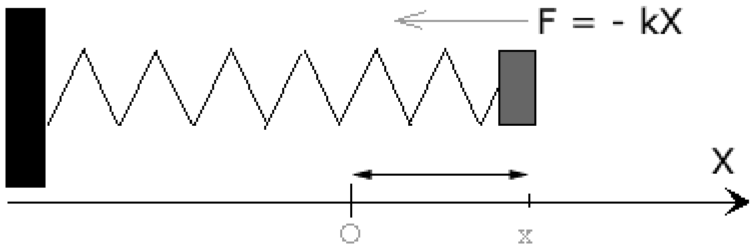


$X(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t)$,

donde X_0 es la amplitud de la oscilación, es decir el máximo valor de la separación del sistema respecto a la posición de equilibrio. *ω* es la *frecuencia angular* de la oscilación: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, siendo ν la frecuencia, es decir, el número de oscilaciones por unidad de tiempo y T el periodo de oscilación.

[1] Hasta hace no mucho tiempo, el oscilador armónico dominaba por estar entre los escasos modelos solubles, pero con la llegada de los ordenadores se han podido emplear otros que se ajustan mucho mejor a gran número de sistemas reales; son los ***osciladores no lineales***, entre los que se encuentran los *caóticos*. Como profesores de Instituto no debemos olvidar que nuestros modelos simples tienen su alcance y sus límites...

En el ejemplo del muelle, X es la longitud en la que el muelle está estirado.



Existe una fuerza, F = - kX, proporcional[2] a X que tiende a devolver al sistema a su posición de equilibrio (el muelle relajado, por ejemplo. Además, cuanto mayor es la constante *k*, más duro es el muelle).

Si recordamos la segunda ley de Newton *F* = *ma* y que la aceleración es la segunda derivada de la posición, $a = -d^2X/dt^2$, obtenemos la ecuación del movimiento del oscilador armónico (¡de todos, no sólo del muelle!):

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -CX(t),$$

donde C es una constante que depende del sistema (por ejemplo, para el muelle unido a una masa *m* vale k/m y para el péndulo simple de longitud *L*, C = g/L).

Para que $\mathbf{X(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t)}$ sea solución de esta ecuación, debe cumplirse $\omega^2 = C$, con lo que el periodo será[3] $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{C}$, o sea,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ para el muelle y}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ para el péndulo.}$$

A estas alturas no parece necesario decir cómo se pueden "comprobar" estas expresiones en el laboratorio más sencillo con muelles o péndulos caseros, ni como poner a prueba la independencia[4] del periodo del péndulo

---

[2] Es la posibilidad más sencilla y la que define al oscilador armónico.
[3] aproximadamente, estamos haciendo una aproximación válida para amplitudes pequeñas.
[4] Curiosa a primera vista y muy importante si se piensa en ella; resulta deberse a una de las propiedades más profundas de la *fuerza gravitatoria*.

respecto a su masa, pero sugeriremos una variación curiosa de uno de estos experimentos sencillos.

2. Cómo pesarse en órbita

Fig. 1

Para estudiar las características del sistema masa – muelle, elegimos un muelle algo distinto a los que uno suele encontrar en el laboratorio. Se trata de un muelle de hilo de acero de 6 mm de sección, 6 cm de diámetro y 33 cm de longitud (no es muy difícil encontrar muelles de parecidas características; en Madrid capital, por ejemplo, se pueden buscar en "Muelles Ros", Ronda de Atocha, 16). Con las técnicas usuales calculamos la constante *k* del muelle, que resultó ser del orden de 2000 $N \cdot m^{-1}$ (el valor exacto no es especialmente importante).

Colgamos del extremo inferior del muelle un asiento de columpio mediante una cuerda (figura 1) para medir la masa, m, de los asistentes a partir del periodo de oscilación, mediante

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 .$$

Si se quiere medir el periodo de oscilación con una precisión aceptable, conviene cronometrar diez oscilaciones completas. Con nuestro muelle fuimos capaces de pesar al público de entre 25 y 90 kg con errores inferiores al 5%.

El título de esta sección obedece a que uno de los métodos posibles para pesar a los astronautas en caída libre es similar al descrito; un muelle (con las espiras separadas) continuará oscilando en órbita con igual periodo, mientras las básculas usuales serían inútiles.

3. Resonancia: del columpio a la guitarra

Como dijimos al principio, una de las características principales de los osciladores es su capacidad para emitir y absorber energía (o dicho de otro modo, para emitir y absorber ***ondas***, que resultan ser uno de los medios de transporte de energía).

Fig. 2

Así emiten radiación electromagnética átomos y moléculas o se emiten y reciben en las antenas o en los hornos microondas las ondas electromagnéticas...

Para ilustrar experimentalmente de forma sencilla (de hacer y de entender) la transferencia de energía a un oscilador desde una fuente externa cuando hay ***resonancia*** o entre dos ***osciladores acoplados*** hemos elegido una serie de ejemplos mecánicos:

¿Qué le falta a una cuerda de guitarra para ser una guitarra? ¿En qué se parece a un columpio? Veamos:

Todo el mundo sabe que para conseguir que aumente la amplitud de un columpio, éste no puede impulsarse de cualquier manera, sino únicamente con su *frecuencia natural* ν (la correspondiente a su longitud L, aproximadamente $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}$)

Una forma interesante de comprobarlo es mediante el sistema de péndulos acoplados de la figura 2. Tres péndulos, dos de ellos de igual longitud, cuelgan anudados de un hilo horizontal. Al poner uno de ellos en oscilación, el hilo se retuerce "empujando" a los otros dos; sin embargo sólo aumenta apreciablemente la amplitud de aquel que tiene igual (o suficientemente parecida) frecuencia; se dice entonces que los péndulos están en ***resonancia***.

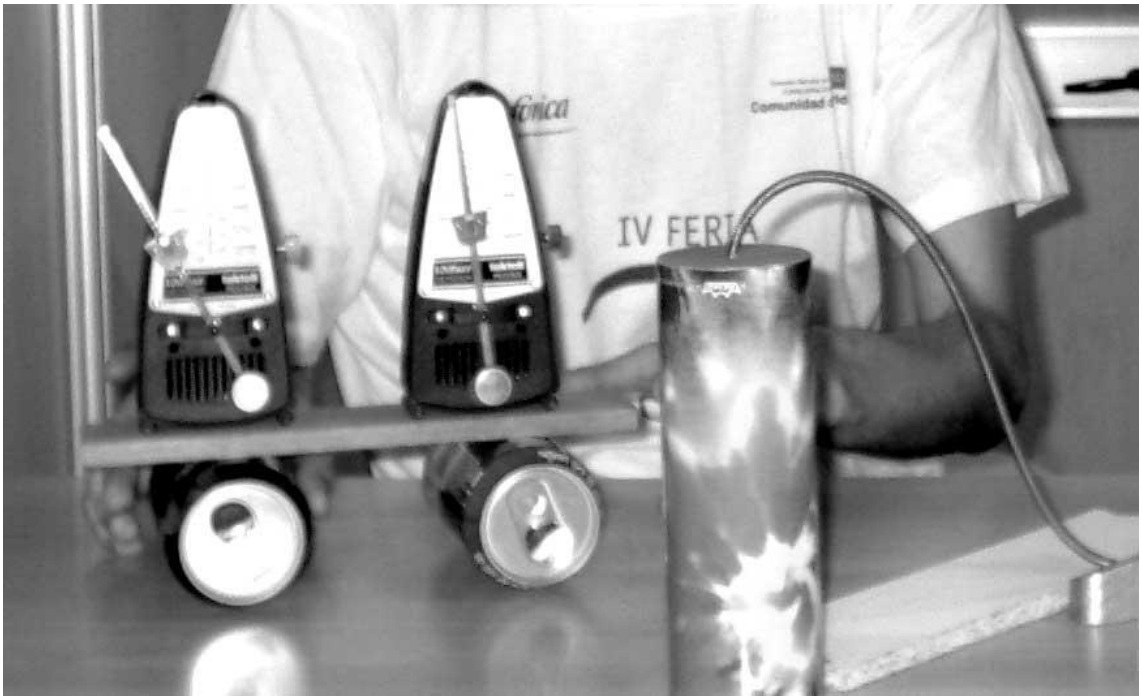
Fig. 3

Otro sistema curioso de péndulos acoplados se muestra en la figura 3; en este caso las oscilaciones son laterales y el acoplamiento se realiza a través de una barra rígida en la que se enrolla parte del hilo de los péndulos. Es curioso ver en estos casos cómo los péndulos se transfieren energía entre sí cuando hay resonancia.

Como veremos, aún es posible construir sistemas de osciladores acoplados más sencillos mediante anillos de cartulina o cadenas…

¿Qué tiene esto que ver con las guitarras? Aproximémonos a la música tomando varios diapasones (horquillas metálicas con dos brazos que vibran y emiten una nota definida al golpearlos) y comprobando que uno que esté vibrando, puede hacer que otro muy próximo oscile también sólo cuando sus frecuencias son iguales o muy parecidas. Si además se dispone de cajas de resonancia, la aproximación entre dos sistemas oscilantes como la guitarra y el columpio estará casi completa; el diapasón, como la cuerda de guitarra, vibra y hace vibrar a la caja de madera, que a su vez hace vibrar al aire de su interior[5], pero la amplificación del sonido sólo es importante si sus dimensiones son adecuadas, es decir, si hay resonancia, justo como en el columpio...

Un último ejemplo curioso de osciladores acoplados y resonancia es el formado por dos metrónomos iguales colocados sobre una tabla apoyada en dos latas vacías de refresco (Fig. 4, abajo)



Si las frecuencias de los metrónomos son diferentes, no pasa nada, oscilan al azar, pero si están muy próximas... (cosas similares ocurren, dicen, con dos relojes de péndulo situados sobre la misma pared o con las menstruaciones de las mujeres que viven bajo el mismo techo y las luciérnagas que a veces se encienden y apagan simultáneamente en un mismo árbol[6], etc.)

[5] Como se puede comprobar con algo aún mejor, un juguete llamado "thunder tube", parecido a una zambomba invertida, que consiste en un tubo de cartón cerrado en su extremo inferior por una membrana en la que está sujeta no una caña, sino un muelle largo y fino que, al vibrar, produce ondas sonoras en el tubo que pueden "sentirse" con la palma de la mano colocada a poca altura sobre el extremo superior (destapado) del tubo. Ver Fig. 4, a la derecha.

[6] Ver "Osciladores acoplados y sincronización biológica" de Steven H. Strogatz e Ian Stewart, en *Investigación y ciencia*, febrero de 1994, pp. 54 – 61.

4. Otros osciladores

Oscilador químico[7]

Hay reacciones químicas con productos ni muy caros ni muy difíciles de encontrar que oscilan espontáneamente entre dos estados que se distinguen visualmente por sus diferentes colores; resulta muy llamativo mezclar unos ingredientes en un vaso y ver cómo la disolución va alternando durante un rato entre dos tonos. Ésta es la receta:

– Se ponen en un vaso de precipitados 150 mL de agua destilada y se añaden 15 mL de ácido sulfúrico concentrado (18 M, por ejemplo). Agitando continuamente, de ser posible con un agitador magnético, se añaden los siguientes componentes en el orden citado (sin pasar a un ingrediente posterior si el anterior no está completamente disuelto): 1,8 g de ácido malónico, $CH_2(COOH)_2$, 1,6 g de bromato de potasio, $KBrO_3$, y 0,4 g de sulfato de manganeso monohidratado: $MnSO_4 \cdot H_2O$. Sin dejar de agitar, se observa en poco tiempo la oscilación.

Oscilador caótico:

Como recordatorio de que la vida es más compleja de lo que los profesores enseñamos, puede usarse este juguete que consiste en un péndulo con un imán en su extremo que oscila sobre una plataforma en la que hay otros tres imanes. Para muchas configuraciones de los imanes, la oscilación parece "caótica" e "impredecible"[8].

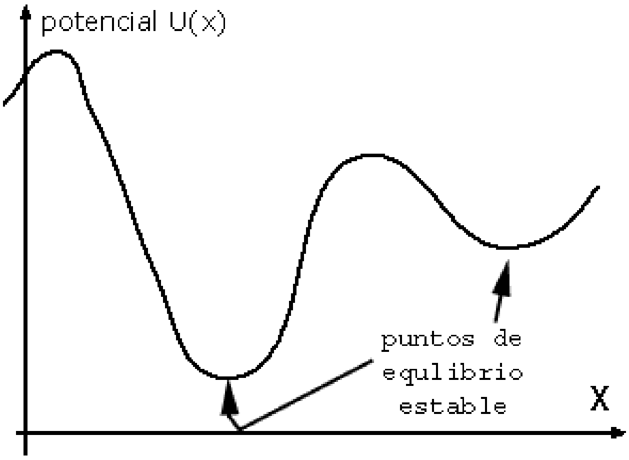
---

[7] Ver "Reacciones químicas oscilantes", de Irving R. Epstein et al. en *Investigación y Ciencia*, mayo de 1983, pp. 82 – 92.

[8] Seamos cuidadosos; parece que hay "hipersensibildad a las condiciones iniciales", es decir, si colocamos dos péndulos idénticos en una posición inicial que nos parece idéntica, comenzarán ejecutando los mismos movimientos, pero poco después irá cada uno a su aire. No podemos asegurar que se cumplen en este caso todos los requisitos técnicos...

5. ¿Por qué es tan útil el modelo del oscilador armónico?

Puede parecer raro que un modelo tan simple como este pueda aplicarse a tantos sistemas físicos diferentes, pero hay una razón matemática:



Una fuerza F = – kX proviene de un potencial (energía potencial por unidad de masa) $U(X) = ½ kX^2$, pues $F = – dU/dX$. Si examinamos un potencial para un sistema imaginario dibujado al azar, como el de la figura, nos encontramos con la sorpresa de que cada vez que hay un mínimo del potencial, es decir, un punto de equilibrio estable, tenemos un oscilador armónico, pues la curva $U_{arm} = ½ kX^2$, que es una parábola se aproxima a la forma del potencial cerca de ese punto (lo que explica por qué la “aproximación armónica” sólo es válida para oscilaciones de pequeña amplitud, cercanas a la zona en la que el potencial armónico U_{arm} y el real U se parecen.

(NOTA: Si no se recuerda cómo analizar el comportamiento de un sistema a partir de su potencial, baste recordar que su evolución es como la de una bolita que dejáramos caer la lo largo de una rampa con la forma del potencial. El punto desde el que se deja caer la bola tiene una altura coincidente con la energía mecánica del sistema. Está claro que si dejamos caer nuestra bolita cerca de un mínimo del potencial, esta oscilará a un lado y a otro del fondo del “pozo de potencial”...)

Más información sobre osciladores, por ejemplo, en

- **Física básica 1**, de Antonio Fernández – Rañada (ed.), capítulo 6. Alianza Editorial, 1993.
- **Física conceptual** novena edición, de Paul G. Hewitt. Pearson Educación, 2004..
- **Curso Interactivo de Física en Internet**, de Ángel Franco, en www.sc.ehu.es/sbweb/fisica

Sobre la necesidad de no dar por supuesto que cualquier trabajo práctico en la escuela es beneficioso sin más, ver por ejemplo:

- **Abrahams, Ian, y Robin Millar**. (2008). «Does Practical Work Really Work? A study of the effectiveness of practical work as a teaching and learning method in school science». *International Journal of Science Education* 30 (November 17): 1945-1969.

Que se puede obtener en:
http://www.rhodes.aegean.gr/ptde/labs/lab-fe/downloads/cti/Does_Practical_Work.pdf

- **Robin, Millar, y Abrahams Ian**. (2009). «Practical work: making it more effective». *School science review* 91 (334): 59-64.

  Que se puede obtener en
  http://www.gettingpractical.org.uk/documents/RobinSSR.pdf

Francisco Barradas Solas
Centro de Intercambios Escolares de la Comunidad de Madrid

VII Jornadas de la Enseñanza de la Física y la Química del Consejo general del Colegio de Licenciados,

18 y 19 de noviembre de 2011
CosmoCaixa, Alcobendas (Madrid)

APÉNDICE

La relación masa – periodo para un muelle Análisis de los datos experimentales

Se han realizado (con dos muelles diferentes) dos experimentos como el de la sección 2 del documento "Un mundo de osciladores" cuyos resultados se recogen más abajo en dos tablas.

Una serie de personas se sentaron en el asiento unido al muelle y en cada caso se cronometraron veinte oscilaciones para cada una de ellas y se halló el valor medio (recogido en la columna ***T***, periodo) y después se midió su masa con una báscula (columna ***m***)

Más tarde se utilizaron esos datos para "predecir" el peso de otras personas a partir de sus periodos de oscilación.

Esto es lo que os vamos a pedir que hagáis:

0. Representar gráficamente los datos. Representar también la masa frente al cuadrado del periodo.

1. Emplead los datos de las tablas para calcular las masas correspondientes a un periodo de oscilación T = 0,90 s (habrá dos masas, claro, pues hay dos muelles). Existen, **al menos**, dos formas de hacerlo, ¿hay una de ellas mejor que otra? ¿por qué?

2. Antes mencionamos que el método aquí empleado podría emplearse (si las espiras del muelle están separadas) para pesarse en órbita o, mejor dicho, en ***caída libre***. ¿Podrías explicar detalladamente por qué y cómo?

3. (OPCIONAL) En realidad, este no es el método que emplean los astronautas para "pesarse", ¿se te ocurre uno alternativo?
   PISTA: piensa en *F = ma...*

MUELLE 1

***T* (s)**	***m* (kg)**
1,01	52,2
1,15	65,4
1,03	52,8
0,83	34,0
1,06	57,5
0,93	44,0
0,98	48,8
0,98	48,8
0,93	43,9
0,98	46,4
1,01	51,7
0,82	32,8
0,87	36,5
0,93	42,5
0,92	43,7
0,98	47,8
1,07	57,0
0,97	46,8
1,08	60,0

MUELLE 2

***T* (s)**	***m* (kg)**
0,840	46,3
1,008	69,0
0,916	56,5
0,745	35,8
0,925	56,9
1,019	71,6
0,933	59,0
1,000	64,2
0,969	61,2
0,731	33,6
0,725	32,9
0,819	41,9
1,063	73,4